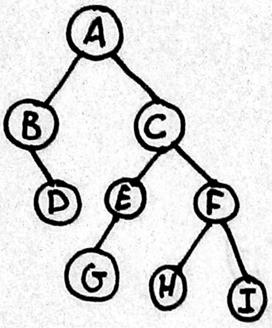
Θεωρία Γραφημάτων

ΜΑΘΗΜΑ: 6

23/11/2018

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρεθούν οι τρεις διασχίσεις (προδιατεταγμένη, μεταδιατεταγμένη, ενδοδιατεταγμένη) του παρακάτω δένδρου:



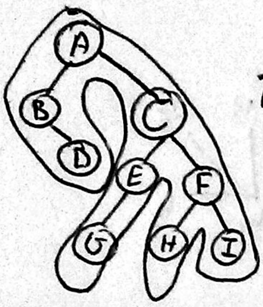
1ος τρόπος (Σύμφωνα με τον ορισμό για κάθε διάσχιση)

Προδιατεταγμένη: ABDCEGFHI

Μεταδιατεταγμένη: DBGEHIFCA

Ενδοδιατεταγμένη: BDAGECHFI

2ος τρόπος (από Youtube ...)



Προδιατεταγμένη: ABDCEGFHI

Δένδρο: Ένα γράφημα το οποίο είναι συνεκτικό και άκυκλο

Δάσος: Ένα μη συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους

Φύλλο: Κορυφή δένδρου βαθμού 1

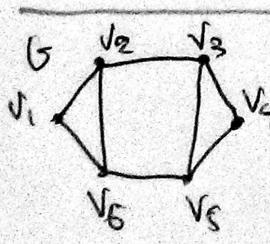
Σκελετικά Δένδρα: Έστω γράφημα G. Ένα παραγόμενο υπογράφημα* T του G το οποίο είναι δένδρο, ονομάζεται σκελετικό δένδρο του G

Τα δημιουργούμε διαγράφοντας ακμές

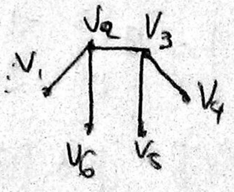
*: υπογράφημα: π.χ. το G χωρίς μία ακμή

Δένδρο με ετικέτες: Δένδρο T όπου σε κάθε κορυφή $u \in V(T)$, έχει αντιστοιχηθεί ένας διακριτός ακέραιος από το σύνολο $\{1, 2, \dots, |V(T)|\}$
Έστω $l: V(T) \to \{1, 2, \dots, |V(T)|\}$ η συνάρτηση που αντιστοιχίζει ετικέτες στις κορυφές του T. Η l είναι 1-1 και επί.
Ένα δένδρο T με συνάρτηση "ετικετών" l συμβολίζεται με $\langle T, l \rangle$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΚΕΛΕΤΙΚΟΥ ΔΕΝΔΡΟΥ



Έχουμε το γράφημα G.
Τότε ένα σκελετικό του είναι:



Ακολουθία Prufer

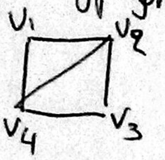
Μια ακολουθία n-2 όρων από τους φυσικούς αριθμούς $\{1,2,\dots,n\}$, λέγεται ακολουθία Prufer τάξης n.

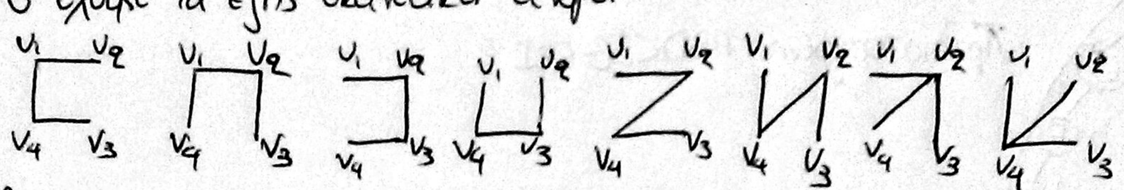
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ PRUFER ΤΑΞΗΣ 10: $[5,5,2,3,3,2,8,8]$

ΠΛΗΘΟΣ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΩΝ ΣΚΕΛΕΤΙΚΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ - ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ

- Έστω ένα σκελετικό δένδρο T και έστω $e \in E(G)$ και $e \notin E(T)$
- $+e$ στο T: τότε θα δημιουργήσουμε έναν ακριβώς κύκλο C_e στο T

Για το γράφημα G έχουμε τα εξής σκελετικά δένδρα:

G: 



Άρα έχουμε 8 σκελετικά δένδρα

- Ο Πίνακας $D(G)$ ενός γραφήματος G είναι ένας $n \times n$ πίνακας

$$D(G)[i,j] = \begin{cases} \deg_G(v_i), & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Ο λαπλασιανός πίνακας $L(G)=D(G)-A(G)$, όπου $A(G)$ είναι ο πίνακας γειτνίασης

$$D(G) = \begin{bmatrix} 2&0&0&0 \\ 0&3&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&3 \end{bmatrix} \quad A(G) = \begin{bmatrix} 0&1&0&1 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{bmatrix} \quad L(G) = \begin{bmatrix} 2&-1&0&-1 \\ -1&3&-1&-1 \\ 0&-1&2&-1 \\ -1&-1&-1&3 \end{bmatrix}$$

Όπου $L(G)_{i|i}$: διαγραφή i-γραμμής και i-στήλης

Παράδειγμα: $L(G)_{4|4} = \begin{bmatrix} 2&-1&0 \\ -1&3&-1 \\ 0&-1&2 \end{bmatrix}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ - ΔΕΝΔΡΩΝ

Για κάθε ακέραιο i, όπου $1 \le i \le n$, το πλήθος των σκελετικών δένδρων του G είναι ίσο με $\det(L(G)_{i|i})$

$$\det(L(G)_{4|4}) = \begin{vmatrix} 2&-1&0 \\ -1&3&-1 \\ 0&-1&2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3&-1 \\ -1&2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1&-1 \\ 0&2 \end{vmatrix} = 12-2-2=8$$

Άρα έχουμε 8 σκελετικά δένδρα για το G